Höhere Analysis

Hyperbolische Funktionen

Tabellen

Übersichten

Text Nr. 51102

Stand: 3. September 2017

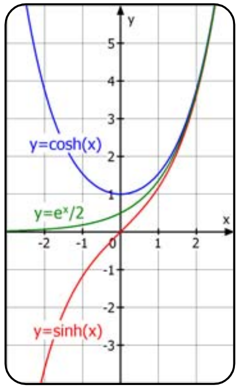
FRIEDRICH W. BUCKEL

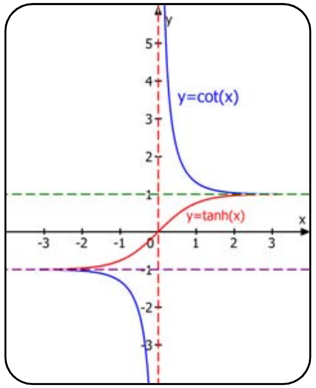
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

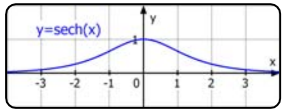
https://mathe-cd.de

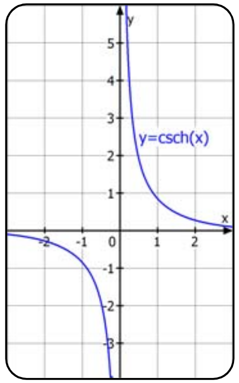
Die wichtigsten Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

	$y = \sinh(x)$	$y = \cosh(x)$	$y = \tanh(x)$	$y = \cot(x)$	$y = \sec(x)$	$y = \text{csch}(x)$
Definition	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\tanh(x) = \frac{e^e - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$	$\text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$	$\text{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$
Def.bereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertebereich	$\mathbb{R}$	$[1; \infty[$	$]-1; 1[$	$\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$	$]0; 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Grenzwerte	$x \to +\infty \Rightarrow \sinh(x) \to \infty$ $x \to -\infty \Rightarrow \sinh(x) \to -\infty$	$x \to \pm\infty$ $\Rightarrow \cosh(x) \to \infty$	$x \to +\infty \Rightarrow \tanh(x) \to 1$ $x \to -\infty \Rightarrow \tanh(x) \to -1$	$x \to +\infty \Rightarrow \coth(x) \to 1$ $x \to -\infty \Rightarrow \coth(x) \to -1$	$x \to \pm\infty$ $\Rightarrow \text{sech}(x) \to 0$	$x \to \pm\infty$ $\Rightarrow \text{csch}(x) \to 0$
Symmetrie	P – Symm. zu O	y – Achsen – Symm.	P – Symm. zu O	P – Symm. zu O	y – Achsen – Symm.	P – Symm. zu O
Polstellen	keine	keine	keine	$x = 0$	keine	$x = 0$
Nullstellen	$x = 0$	$x = 0$	$x = 0$	keine	keine	keine
Ableitung	$\sinh'(x) = \cosh(x)$	$\cosh'(x) = \sinh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$1 - \coth^2(x) = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$	$-\frac{\text{csch}(x)}{\tanh(x)}$
Extrema	keine	$y_{min} = f(0) = 1$	keine	keine	$y_{max} = f(0) = 1$	keine
Wendepunkt	$W(0 \mid 0)$	keiner	$W(0 \mid 0)$	keiner	$W\left(\pm\ln(1+\sqrt{2} \mid \sqrt{2}\right)$	keiner
Monotonie	streng mon. steigend	Für $x \leq 0$ str. mon. fall. Für $x \geq 0$ str. mon. steig.	streng mon. steigend	Für $x < 0$ str. mon. fall. Für $x > 0$ str. mon. fall.	Für $x \leq 0$ str. mon. steig. Für $x \geq 0$ str. mon. fall..	Für $x < 0$ str. mon. fall. Für $x < 0$ str. mon. fall.
Stammfunkt.	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\ln\lvert\sinh(x)\rvert$	$\arctan(\sinh(x))$	$\ln\left(\tan\left(\frac{\lvert x\rvert}{2}\right)\right)$









Umrechnungstabelle für die hyperbolischen Funktionen

	sinh	cosh	tanh	coth	sech	csch
$\sinh(x) =$		$\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\cosh^2(x)-1}$	$\frac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{\coth^2(x)-1}}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}{\operatorname{sech}(x)}$	$\frac{1}{\operatorname{csch}(x)}$
$\cosh(x) =$	$\sqrt{1+\sinh^2(x)}$		$\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$	$\frac{\lvert\coth(x)\rvert}{\sqrt{\cot^2(x)-1}}$	$\frac{1}{\operatorname{sech}(x)}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}{\lvert\operatorname{csch}(x)\rvert}$
$\tanh(x) =$	$\frac{\sinh(x)}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}{\cosh(x)}$		$\frac{1}{\coth(x)}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}$	$\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}$
$\coth(x) =$	$\frac{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}{\sinh(x)}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}$	$\frac{1}{\tanh(x)}$		$\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}$
$\operatorname{sech}(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}$	$\frac{1}{\cosh(x)}$	$\sqrt{1-\tanh^2(x)}$	$\frac{\sqrt{\cot^2(x)-1}}{\lvert\coth(x)\rvert}$		$\frac{\lvert\operatorname{csch}(x)\rvert}{\sqrt{1+\operatorname{csch}^2(x)}}$
$\operatorname{csch}(x) =$	$\frac{1}{\sinh(x)}$	$\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)-1}}$	$\frac{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}{\tanh(x)}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{\coth^2(x)-1}$	$\operatorname{sgn}(x)\cdot\frac{\operatorname{sech}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(x)}}$	

Formeln

Definitionen:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - ex}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - ex}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Folgerungen: $\sinh(x) + \cosh(x) = e^x$ $\qquad$ $\sinh(x) - \cosh(x) = e^{-x}$

Additionstheoreme:

$$\sinh(u+v) = \sinh(u)\cdot\cosh(v) + \cosh(u)\cdot\sinh(v) \qquad \sinh(u-v) = \sinh(u)\cdot\cosh(v) - \cosh(u)\cdot\sinh(v)$$

$$\cosh(u+v) = \cosh(u)\cdot\cosh(v) + \sinh(u)\cdot\sinh(v) \qquad \cosh(u-v) = \cosh(u)\cdot\cosh(v) - \sinh(u)\cdot\sinh(v)$$

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh(u) + \tanh(v)}{1 + \tanh(u)\cdot\tanh(v)} \qquad \tanh(u-v) = \frac{\tanh(u) - \tanh(v)}{1 - \tanh(u)\cdot\tanh(v)}$$

Doppeltes Argument:

$$\sinh(2x) = 2\cdot\sinh(x)\cdot\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\sinh^2(x) + 1 = 2\cdot\cosh^2(x) - 1$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

Dreifaches Argument: $\sinh(3x) = 4\sinh^3(x) + 3\sinh(x)$ $\qquad$ $\cosh(3x) = 4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)$

Halbes Argument:

$$\sinh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{2}} \qquad \cosh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x) + 1}{2}}$$

$$\tanh\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x) + 1}\,\frac{\cosh(x) - 1}{\sinh(x)} = \coth(x) - \operatorname{csch}(x)$$

$$\coth\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x) - 1}\,\frac{\cosh(x) + 1}{\sinh(x)} = \coth(x) + \operatorname{csch}(x)$$

Summenformeln:

$$\sinh(u) + \sinh(v) = 2\cdot\sinh\left(\tfrac{u+v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\tfrac{u-v}{2}\right)$$

$$\sinh(u) - \sinh(v) = 2\cdot\sinh\left(\tfrac{u-v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\tfrac{u+v}{2}\right)$$

$$\cosh(u) + \cosh(v) = 2\cdot\cosh\left(\tfrac{u+v}{2}\right)\cdot\cosh\left(\tfrac{u-v}{2}\right)$$

$$\cosh(u) - \cosh(v) = 2\cdot\sinh\left(\tfrac{u+v}{2}\right)\cdot\sinh\left(\tfrac{u-v}{2}\right)$$